INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'EMPLOI D'ÉLÈVE ATTACHÉ et
CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

(Division des cadres de gestion statistique) Option A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N. B. :

1° Les deux problèmes n'ont aucun lien entre eux et peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

2° Les parties II et III du premier problème sont indépendantes. La partie I de ce problème n'est utile que pour la résolution des questions II.3°, II.4° et III.6°.

3° Dans toute l'épreuve, le corps de base est $\mathbb{R}$. La notation $\ln x$ désigne le logarithme népérien du nombre réel x.

4° On rappelle qu'un entier *premier* est un élément de $\mathbb{N}^*$ admettant dans $\mathbb{N}$ exactement deux diviseurs *distincts* : 1 et lui-même. Avec cette convention, 1 n'est pas considéré comme un entier premier.

***

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I

1° L'objet de cette question est le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Définissons une application périodique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par les conditions :

$$\begin{cases} \forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = x^2 ; \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x). \end{cases}$$

Montrer que f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Calculer le développement de Fourier de f, et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, que l'on exprimera à l'aide de π.

2° Soient les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,dx}{x}, \qquad J = \int_{-1}^0 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx .$$

Justifier brièvement l'existence de I et de J.

Calculer I et J ; on emploie pour cela un développement en série entière convenablement choisi, ainsi que le résultat de la question 1°.

PARTIE II

1° On pose $K = \int_0^1 \ln x \,.\, \ln(1-x)\,dx$.

Justifier l'existence de K, dont on déterminera le signe.

2° Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une application g_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par les égalités :

$$g_n(x) = -\frac{x^n}{n} \ln x \quad \text{si } x \in]0,1]; \qquad g_n(0) = 0.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions g_n.

En déduire une expression de K à l'aide de la somme d'une série convergente.

3° À l'aide de la partie I, calculer K en fonction de π et vérifier le signe du résultat.

4° Calculer, en s'inspirant de ce qui précède, l'intégrale :

$$K_1 = \int_0^1 \ln x \,.\, \ln(1+x)\,dx$$ dont on établira d'abord la convergence.

PARTIE III

On pose dans toute cette partie, x désignant un réel :

$$h(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^t \ln \operatorname{ch} t\,dt.$$

1° Justifier brièvement la convergence de l'intégrale intervenant dans la définition de $h(x)$. Trouver le signe de $h(x)$.

2° Calculer explicitement $h(x)$, dont on devra donner une expression simple à l'aide de $\ln \operatorname{ch} x$ et de e^{-x} Arctg e^x.

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M-Math 2
page 105
1987

3° Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.

Trouver le signe de $h''(x)$; on pourra éventuellement faire intervenir une fonction auxiliaire.

Calculer $h'(0)$ et $h'(1)$.

En déduire que l'équation $h'(x) = 0$ a une seule racine, notée x_0, appartenant à $]0,1[$.

4° Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$. On ne demande pas ici de calcul décimal approché de x_0, ce calcul étant reporté à la question 7°.

5° Montrer l'existence de quatre réels α, β, γ, δ, que l'on calculera, tels que :

$$\lim_{x \to -\infty} [h(x) - (\alpha x + \beta)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} [h(x) - (\gamma x + \delta)] = 0.$$

Déterminer le signe de $[h(x) - (\alpha x + \beta)]$ et celui de $[h(x) - (\gamma x + \delta)]$.

6° On pose : $L = \int_{-\infty}^{0} [h(x) - (\alpha x + \beta)]\, dx$; $M = \int_{0}^{+\infty} [h(x) - (\gamma x + \delta)]\, dx$.

Justifier l'existence de L et de M. À l'aide de la partie I, calculer L et M en fonction de π et de $\ln 2$. Donner des valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de L et de M.

7° Calculer une valeur décimale approchée à 10^{-6} près de x_0. On indiquera avec précision la méthode et le matériel utilisés. Calculer aussi une valeur décimale approchée de $f(x_0)$.

8° Dessiner soigneusement le graphe (C) de h sur papier millimétré. Les axes étant rectangulaires, l'unité de longueur sera représentée sur chaque axe par un segment de longueur égale à 10 cm. On figurera les deux asymptotes de (C), dont on déterminera le point d'intersection A.

DEUXIÈME PROBLÈME

L'objet du problème est la détermination de l'ensemble (E) des couples de *rationnels* (x, y) vérifiant les conditions :

$$(S) \qquad \begin{cases} x^x = y^y ; \\ 0 < x < y. \end{cases}$$

Supposant qu'un couple (x, y) vérifie (S), on pose dans tout le problème :

$$x = \frac{a}{b}, \qquad y = \frac{c}{d}, \qquad a, b, c, d \text{ étant des éléments de } \mathbb{N}^*,$$

les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ étant *irréductibles*.

1° *a.* Montrer qu'on ne peut avoir $b = d = 1$. En conclure que l'un au moins des entiers b, d est supérieur ou égal à 2.

b. Montrer que si $a = c = 1$, alors nécessairement $b = 4$ et $d = 2$. Vérifier que le couple $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ satisfait à (S).

On exclut dans tout ce qui suit le cas précédent. Donc, dans la suite du problème, l'un au moins des entiers a, c est supérieur ou égal à 2.

2° Montrer qu'un entier premier divise a si et seulement s'il divise c, et qu'un entier premier divise b si et seulement s'il divise d.

En déduire que $a \geqslant 2$, $c \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, $d \geqslant 2$.

3° À l'aide de la question précédente, montrer que :

$$a = nc \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \geqslant 2,$$
$$b = n'd \text{ avec } n' \in \mathbb{N}^* \text{ et } n' \geqslant 2.$$

Montrer que $n' > n$ et en conclure que $n' \geqslant 3$.

Montrer que n et n' sont premiers entre eux.

4° Montrer l'existence de deux entiers u, v vérifiant :

$$u \geqslant 2, \qquad v \geqslant 2, \qquad c = u^n, \qquad d = v^n.$$

5° À l'aide de la question précédente, déterminer la différence $(n' - n)$.

En déduire a, b, c, d en fonction de n seul. On note dans ce qui suit :

$$a = a(n), \quad b = b(n), \quad c = c(n), \quad d = d(n).$$

6° Vérifier que les expressions obtenues satisfont bien, quel que soit l'entier n tel que $n \geqslant 2$, aux relations :

$$\left[\frac{a(n)}{b(n)}\right]^{\frac{a(n)}{b(n)}} = \left[\frac{c(n)}{d(n)}\right]^{\frac{c(n)}{d(n)}} \qquad \text{et} \qquad \frac{a(n)}{b(n)} < \frac{c(n)}{d(n)},$$

et en déduire que (E) est infini.

* * *